Problema: siano *h* l'altezza di un cilindro e *r* il raggio del cerchio di base. Calcolare il rapporto *h/r* che a parità di volume *V* minimizzi la superficie esterna *S*.

Soluzione 1:
questa soluzione richiede conoscenze di analisi matematica da scuola superiore (superficie e volume di elementi geometrici tridimensionali, derivate di una funzione).

Richiedere che il volume sia costante significa:

$$V=\pi r^2 h=c$$

in cui *c* è una costante. Si può includere il valore π all'interno della parte costante definendo una nuova costante *C*:

$$C=\frac{c}{\pi}$$

ottenendo

$$r^2 h=C$$

$$h=\frac{C}{r^2}$$

La superficie esterna del cilindro è data dalla somma delle aree di base e della superficie laterale:

$$S=2\pi r^2+2\pi r h=2\pi r(r+h)=2\pi r\left(r+\frac{C}{r^2}\right)=2\pi\left(r^2+\frac{C}{r}\right)$$

Porre la derivata prima nulla per la funzione *S* significa trovare i suoi punti estremanti (massimo o minimo):

$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2\mathrm{r}-\frac{C}{r^2}\right)=0$$

che diventa:

$$2\mathrm{r}-\frac{C}{r^2}=0$$

ovvero:

$$2\mathrm{r}=\frac{C}{r^2}$$

ricordiamo però che il vincolo sul volume (possiamo scegliere qualsiasi *r* e *h* in modo che il cilindro abbia sempre lo stesso volume) fornisce:

$$C=r^2 h$$

che sostituito nell'equazione precedente dà:

$$2\mathrm{r}=\frac{r^2 h}{r^2}=h$$

Perciò il solo valore estremante per la funzione *S* è tale che:

$$\boxed{\frac{h}{r}=2}$$

Si può controllare che sia un valore di minimo calcolando la derivata seconda della funzione *S*:

$$\frac{d^2 S}{dr^2}=2\pi\left(2+2\frac{C}{r^3}\right)=4\pi\left(1+\frac{C}{r^3}\right)$$

Poiché *C* e *r* sono entrambi valori positivi, la derivata seconda è positiva; perciò la superficie esterna presenta, in corrispondenza della soluzione trovata, un punto di minimo.

Soluzione 2:
questa soluzione richiede conoscenze da esami di Analisi I e Analisi II dei vecchi ordinamenti di ingegneria (derivate parziali e totali di una funzione in due incognite).

Volume V e superficie S di un cilindro valgono rispettivamente:

$$V = 2 r^2 h$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r (r + h)$$

Scegliere h e r in modo tale che il volume V rimanga costante significa che, per ogni valore di altezza e raggio di base, il differenziale totale della funzione volume deve essere nullo:

$$dV = 2\pi r h \partial r + \pi r^2 \partial h = 0$$
$$2 h \partial r + r \partial h = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial r} = -2 \frac{h}{r}$$

Il calcolo dei valori estremanti della funzione S si fa imponendo che il suo differenziale totale sia nullo:

$$dS = 2\pi 2\mathrm{r} \partial r + 2\pi h \partial r + 2\pi r \partial h = 0$$
$$2\mathrm{r} \partial r + h \partial r + r \partial h = (2\mathrm{r} + h) \partial r + r \partial h = 0$$
$$\frac{(2\mathrm{r} + h)}{r} = -\frac{\partial h}{\partial r}$$

sostituendo l'espressione del vincolo nell'ultima equazione si arriva a:

$$\frac{(2\mathrm{r} + h)}{r} = 2 \frac{h}{r}$$

che porta a:

$$2\mathrm{r} + h = 2\mathrm{h}$$
$$2\mathrm{r} = 2\mathrm{h} - h = h$$

ed infine al risultato:

$$\boxed{\frac{h}{r} = 2}$$